Краткие сообщения ОИЯИ №2[35]-89 *JINR Rapid Communications No.2[35]-89*
УДК 512.8

МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Х.И.Семерджиев, Р.М.Ямалеев

Получены формулы присоединенной матрицы и определителя для полиномиальных матриц (циркулянтов), зависящих от унитарных матриц, N-я степень которых есть единица матричной алгебры. Показано, что присоединенная матрица может быть представлена как произведение матриц-полиномов, аргументы которых умножены на корни из единицы и определитель есть каноническая N-форма из коэффициентов полинома.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

A Method for Inversing One Class of Polynomial Matrices

Kh.I.Semerdzhiev, R.M.Yamaleev

The formulae of adjoint matrix and determinant for polynomial matrices (circulants) depending on unitary matrices, N-degree of which is a unit of matrix algebra, are obtained. It is shown that adjoint matrix may be represented as a product of the given matrix-polynoms, arguments of which are multiplied on the roots of unit, determinant is a canonical N-form from the polynom coefficient.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Как известно, если невырожденная матрица второго порядка, заданная над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, выражена в базисе матриц Паули /1/ :

$$A(2) := a_0 E_2 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 ,$$

то для получения присоединенной матрицы A^V достаточно изменить знак перед матрицами σ_1, σ_2, σ_3. Таким образом, получим

$$A^V(2) = a_0 E_2 - a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 ,$$

$$AA^V = A^V A = \det A .$$

Здесь представляется вполне закономерным вопрос: нельзя ли обобщить эту процедуру на случай матриц произвольного порядка? В [2], как непосредственное обобщение базиса матриц Паули на случай матриц N-го порядка, предложен матричный базис алгебры Диксона и в этом базисе разработан алгоритм нахождения обратной матрицы. Можно показать, что в случае матриц произвольного порядка получить присоединенную (обратную) матрицу путем простых изменений базиса нельзя. Поэтому в случае $N > 2$ представляют интерес такие классы матриц, для которых можно написать аналитическое выражение присоединенной (обратной) матрицы непосредственно. В предлагаемой работе мы выведем формулу присоединенной (обратной) матрицы и формулу определителя для невырожденной полиномиальной матрицы:

$$P_n(X) := a_o X^{n-1} + a_1 X^{n-2} + \ldots + a_{n-2} X + a_{n-1} E_M, \tag{1}$$

где X — комплексная матрица порядка $M \geq n$ (или нелинейный оператор), удовлетворяющая условию $X^n = E_M$, $a_o, a_1, \ldots, a_{n-1} \in$ $\in \mathbb{C}$, E_M — единичная матрица порядка M.

В квантовой механике на полилинейных формах [3,4,5] подобные (1) матрицы будут выполнять роль аналогов матриц вращения.

Рассмотрим скалярный алгебраический полином

$$P_n(x) := a_o x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1}, \tag{2}$$

соответствующий полиномиальной матрице (1), и вспомогательные полиномы $P_{n,k}(x) = P_n(\theta^k x)$, $k = 1,2,\ldots, n-1$, где θ — n-й примитивный корень из единицы ($\theta^n = 1$). Ясно, что имеет место соотношение

$$\sum_{i=o}^{n-1} \theta^{i\ell} = \sum_{i=o}^{n-1} \theta^{-i\ell} = \begin{cases} 0 & \ell \neq 0, n, 2n, \ldots \\ n & \ell = 0, n, 2n, \ldots . \end{cases} \tag{3}$$

Если корни полинома (2) обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, то корнями полинома $P_{n,k}(x)$ являются числа $x_i \theta^{-k}$ ($k, i = 1,2,\ldots,$ $n-1$).

Лемма. Для произвольных чисел $a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}$ справедливо соотношение

$$\prod_{k=o}^{n-1} P_{n,k}(x) = \prod_{k=o}^{n-1} P_n(\theta^k x) = \sum_{\ell=o}^{n-1} b_{N-\ell n} x^{\ell n}, \tag{4}$$

где $N = n(n-1)$ и коэффициенты $b_0, b_n, \dots, b_N$ выражаются определенным образом через коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Доказательство. Ясно, что $\prod_{k=0}^{n-1} P_n(\theta^k x)$ есть полином порядка N. Необходимо показать, что в этом полиноме среди коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_N$ независимо от $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ отличными от нуля могут быть только $b_0, b_n, \dots, b_N$. Для вычисления $b_0, b_1, \dots, b_N$ можем использовать степенные суммы /2/ $\bar{S}_k = \sum_{j=1}^{N} \bar{x}_j^k$, $k = 1,2,\dots,$ где $\bar{x}_j$ — корни полинома $Q_N(x) = \prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^s x)$. Для коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_N$ имеем/2/ :

$$
\begin{cases}
b_1 = -b_0 \bar{S}_1 \\
b_2 = -\frac{1}{2}(b_0 \bar{S}_2 + b_1 \bar{S}_1) \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
b_N = -\frac{1}{2}(b_0 \bar{S}_N + b_1 \bar{S}_{N-1} + \dots + b_{N-1} \bar{S}_1).
\end{cases}
\tag{5}
$$

Степенные суммы $\bar{S}_k$ можно выразить через степенные суммы S_k полинома (2). Действительно, все корни полинома (2) x_i, $i = \overline{1, n-1}$, и полиномов $P_n(\theta^s x) - x_i \theta^{-s}$, $i, s = \overline{1, n-1}$, являются и корнями полинома $Q_N(x)$. Тогда, используя (3), находим

$$
\bar{S}_k = \sum_{j=1}^{N} \bar{x}_j^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \theta^{-\ell})^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \theta^{-\ell k} S_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0, n, 2n, \dots \\ nS_k & k = 0, n, 2n, \dots . \end{cases}
\tag{6}
$$

Очевидно, что $b_0 = a_0^n \theta^{N/2}$. Далее применяем (5) и (6):

$$
b_r = -\frac{1}{r} \sum_{m=0}^{r-1} b_m \bar{S}_{r-m} = 0, \quad r = \overline{1, n-1}.
$$

Коэффициенты $b_n, b_{2n}, \dots, b_N$ можно вычислить по формуле

$$
b_{\ell n} = -\frac{1}{\ell n} \sum_{p=0}^{\ell-1} b_{pn} \bar{S}_{(\ell-p)n} = -\frac{1}{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-1} b_{pn} S_{(\ell-p)n}, \; \ell = \overline{1, n-1}.
\tag{7}
$$

Коэффициенты же b_r $(r \geq n+1, r \neq \ell n, \ell = \overline{1, n-1})$ $= -\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{r-1} b_m \bar{S}_{r-m} = 0$, так как $\bar{S}_{r-m} \neq 0$, только если $r-m$ кратно n, но $b_m = 0$ при $m \leq r$ и m не кратно n.

Доказательство можно провести и несколько иным способом и тем самым получить сразу выражения для $b_{\ell n}$ через $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. По формуле Варинга /6/ имеем

$$b_p/b_0 = \sum_{\mu_1+2\mu_2+\ldots+p\mu_p=p} \frac{(-1)^{\mu_1+\ldots+\mu_p}}{\mu_1!\ \ldots\ \mu_p!}\left(\frac{\bar{S}_1}{1}\right)^{\mu_1}\left(\frac{\bar{S}_2}{2}\right)^{\mu_2}\ldots\left(\frac{\bar{S}_p}{p}\right)^{\mu_p}. \quad (8)$$

Пусть $p = \ell n + q$, $0 < q < n$. Имея в виду (6) и (8), нужно оставить лишь те слагаемые, при которых отличны от нуля только индексы $\mu_n, \mu_{2n}, \ldots, \mu_{\ell n}$, при этом должно выполняться равенство

$$n\mu_n + 2n\mu_{2n} + \ldots + \ell n\mu_{\ell n} = \ell n + q. \quad (9)$$

Но при любом выборе $\mu_n, \mu_{2n}, \ldots, \mu_{\ell n}$ левая часть (9) кратна n, а правая — не кратна n. Таким образом, $b_{\ell n+q} = 0$, $0 < q < n$, $\ell = \overline{0, n-2}$. Если $q = 0$, то левую часть равенства (9) можно сократить на n. Вводя переобозначения $\lambda_1 = \mu_n$, $\lambda_2 = \mu_{2n}$, ..., $\lambda_\ell = \mu_{\ell n}$, из (6), (8) и (9) находим

$$b_{\ell n}/b_0 = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+\ell\lambda_\ell=\ell} \frac{(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_\ell}}{\lambda_1!\ \ldots\ \lambda_\ell!}\left(\frac{S_n}{1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{S_{2n}}{2}\right)^{\lambda_2}\ldots\left(\frac{S_{\ell n}}{\ell}\right)^{\lambda_\ell}. \quad (10)$$

Используя обратную формулу Варинга /6/, получаем

$$\frac{S_{n\ell}}{n\ell} = \sum_{\nu_1+2\nu_2+\ldots+(n-1)\nu_{n-1}=n\ell} (-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_{n-1}} \frac{(\nu_1+\ldots+\nu_{n-1}-1)!}{\nu_1!\ \ldots\ \nu_{n-1}!} \times \quad (11)$$

$$\times \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\nu_2}\ldots\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}\right)^{\nu_{n-1}}, \qquad \ell = \overline{1, n-1}.$$

Таким образом, (11) и (7) или (11) и (10) дают конкретные выражения для $b_{\ell n}$, $\ell = \overline{1, n-1}$, через $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Доказательство факта, что $b_k = 0$, $k \neq 0, n, \ldots, N$, можно получить и очень простым, но не конструктивным способом. Имеем

$$\prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^s x) = Q_N(x), \tag{12}$$

где

$$P_n(\theta^s x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta^{s(n-1-k)} x^{n-1-k}, \quad s = \overline{0, n-1},$$

$$Q_N(x) = \sum_{m=0}^{N} b_m x^{N-m}.$$

Если в (12) заменить x на θx, то $P_n(\theta^\ell x)$ переходит в $P_n(\theta^{\ell+1} x)$, $\ell = \overline{0, n-2}$, а $P_n(\theta^{n-1} x)$ переходит в $P_n(x)$. Таким образом, левая часть (12) не меняется. Следовательно, должно выполняться тождество $Q_N(x) = Q_N(\theta x)$, то есть

$$b_m = b_m \theta^{N-m}, \quad m = \overline{0, N}. \tag{13}$$

Если $m = \ell n$, $\ell = \overline{0, n-1}$, то $N - m = (n - 1 - \ell) n$, $\theta^{N-m} = 1$, и формулы (13) никакой информации относительно $b_{\ell n}$ не дают. Если, однако, m не кратно n, то $m = [m/n] n + q$, $0 < q < n$, $[x]$ — целая часть от x. Тогда $N - m = n(n - 1 - [m/n]) - q$ и, следовательно, (13) дает $b_m = b_m \theta^{-q}$, т.е. $b_m = 0$.

Теперь найдем выражение для $H_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell n}$. С одной стороны, из (12) при $x = 1$ находим

$$H_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^s) = \prod_{s=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta^{s(n-1-k)} \Big). \tag{14}$$

Формула (14) задает однородную функцию $H_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ в факторизованном виде. С другой стороны, можем вычислить $b_{\ell n}$, $\ell = \overline{0, n-1}$ и просуммировать их. Тем самым получим $H_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ в развернутом виде. Из (12) имеем

$$\prod_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta^{s(n-1-k)} x^{n-1-k}\right) = \sum_{r=0}^{n-1} b_{rn} x^{N-rn}$$

и, следовательно,

$$b_{N-rn} = \frac{1}{(rn)!}\left[\frac{d^{rn}}{dx^{rn}} \prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^s x)\right]_{x=0}, \quad r = \overline{0, n-1}. \tag{15}$$

Согласно формуле Лейбница имеем

$$\frac{d^{rn}}{dx^{rn}} \prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^s x) =$$

$$= \sum_{\lambda_0+\ldots+\lambda_{n-1}=rn} \frac{(rn)!}{\lambda_0!\ldots\lambda_{n-1}!} \prod_{s=0}^{n-1} \frac{d^{\lambda_s}}{dx^{\lambda_s}} P_n(\theta^s x), \tag{16}$$

где $\lambda_s \geq 0$, $s = \overline{0, n-1}$. Но так как степень любого из полиномов $P_n(\theta^s x)$, $s = \overline{0, n-1}$ равняется n, то в сумме (16) останутся только те слагаемые, для которых $\lambda_s \leq n$. Кроме того, имеем

$$\frac{d^{\lambda_s}}{dx^{\lambda_s}} P_n(\theta^s x)\Big|_{x=0} = a_{n-1-\lambda_s} \theta^{s\lambda_s} \lambda_s! \tag{17}$$

Используя (17), (16) и (15), получаем

$$H_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{\lambda_0+\ldots+\lambda_{n-1}=rn \\ 0\leq\lambda_i\leq n-i}} \theta^{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}} \prod_{s=0}^{n-1} a_{n-1-\lambda_s}. \tag{18}$$

Приведем несколько частных случаев:

$H_2(a_0, a_1) = -a_0^2 + a_1^2$,

$H_3(a_0, a_1, a_2) = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0 a_1 a_2$,

$$H_4(a_0,a_1,a_2,a_3) = -a_0^4 + a_1^4 - a_2^4 + a_3^4 + 4a_0^2a_1a_3 - 4a_0a_1^2a_2 +$$

$$+ 4a_1a_2^2a_3 - 4a_0a_2a_3^2 + 2a_0^2a_2^2 - 2a_1^2a_3^2 .$$

Теорема. Полиномиальная матрица $P_n(X) \equiv a_0X^{n-1} + a_1X^{n-2} + \dots + a_{n-2}X + a_{n-1}E_M$, X — комплексная матрица порядка M, удовлетворяющая условию $X^n = E_M$, с комплексными коэффициентами $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_{n-1}$, при условии, что $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta^{s(n-1-k)} \neq 0$, $s = \overline{0, n-1}$, т.е. $H_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$, θ — n-й примитивный корень из единицы, имеет обратную матрицу и ее можно представить в факторизованном виде:

$$[P_n(X)]^{-1} = \prod_{s=1}^{n-1} P_n(\theta^s X)/H_n(a_0,a_1,\dots,a_{n-1}). \tag{19}$$

Доказательство. Если в (4) вместо скалярного аргумента x положим X и положим, что $X^n = E_M$, получим

$$\prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^s X) = (\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell n})E_M = H_n(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})E_M, \tag{20}$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание. На самом деле из (20) вытекает справедливость более общей, чем (19), формулы

$$[P_n(\theta^k X)]^{-1} = \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq k}}^{n-1} P_n(\theta^s X)/H_n(a_0,a_1,\dots,a_{n-1}), \quad k = \overline{0,n-1}.$$

Выясним теперь общий смысл функции $H_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ — собственные значения матрицы X. Так как $X^n = E_M$, то $\lambda_i^n = 1$, $i = \overline{1, L}$. Следовательно, собственные значения матрицы X — это некоторые n-е корни из единицы, т.е. $\lambda_i = \theta^{k_i}$, $i = \overline{1,L}$, при некоторых конкретных k_i, $0 \leq k_i \leq n-1$. Собственные значения матрицы $P_n(X)$ — это $P_n(\lambda_i)$, $i = \overline{1,L}$. Пусть собственное значение λ_i имеет кратность ν_i, $i = \overline{1,L}$, $\nu_1 + \dots + \nu_L = M$. Тогда

$$\det P_n(X) = \prod_{i=1}^{L} [P_n(\lambda_i)]^{\nu_i}. \tag{21}$$

Выражение для H_n можно записать еще так:

$$H_n(a_o, a_1, \dots, a_{n-1}) = \prod_{i=o}^{n-1} P_n(\theta^i). \tag{22}$$

Из условия теоремы $P_n(\theta^i) \neq 0$, $i = \overline{0, n-1}$, и, таким образом, $H_n(a_o, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$. Последнее условие достаточно для невырожденности матрицы $P_n(X)$, так как из (21) получаем, что

$$\det P_n(X) = \prod_{i=1}^{L} [P_n(\theta^{k_i})]^{\nu_i} \neq 0.$$

В частном случае $E = M = n$, т.е. $\nu_1 = \dots = \nu_n = 1$, имеем, что $H_n(a_o, a_1, \dots, a_{n-1}) = \det P_n(X)$.

Пример. К классу матриц, удовлетворяющих условиям теоремы, относятся циркулянты [6-8]:

$$R = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ - & - & - & - & - & - \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_n & c_1 \end{pmatrix},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные комплексные числа. Если в R положим $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$, $c_n = 1$, то в результате получим базисный циркулянт X, для которого $X^n = E_n$, и общий циркулянт R может быть представлен в виде $R = c_2 X^{n-1} + c_3 X^{n-2} + \dots + c_n X + c_1 E_n \equiv P_n(X)$. Если $H_n(c_2, c_3, \dots, c_n, c_1) \neq 0$, то по формуле (13) находим

$$R^{-1} = \prod_{s=1}^{n-1} \begin{pmatrix} c_1 & c_2\theta^{s(n-1)} & c_3\theta^{s(n-2)} & \ldots & c_{n-1}\theta^{2s} & c_n\theta^{s} \\ c_n\theta^{s} & c_1 & c_2\theta^{s(n-1)} & \ldots & c_{n-2}\theta^{3s} & c_{n-1}\theta^{2s} \\ - & - & - & - & - & - \\ c_3\theta^{s(n-2)} & c_4\theta^{s(n-3)} & c_5\theta^{s(n-4)} & \ldots & c_1 & c_2\theta^{s(n-1)} \\ c_2\theta^{s(n-1)} & c_3\theta^{s(n-2)} & c_4\theta^{s(n-3)} & \ldots & c_n\theta^{s} & c_1 \end{pmatrix}$$

Так как в данном случае имеем, что $M = n$ и собственные значения различны, то $L = n$, и для определителя циркулянта R получаем

$$\det R = H_n(c_2, c_3, \ldots, c_n, c_1) = \prod_{s=0}^{n-1} P_n(\theta^{s}).$$

Литература

1. Паули В. — Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1977, с.222.
2. Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ Р5-88-834, Дубна, 1988.
3. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ Р2-88-147, Дубна, 1988.
4. Finkelstein D. — Phys. Rev. Lett., 1986, 56(15), p.1532.
5. Rausch M. de Traunbenberg, Fleury N. — CRN/HE 88-04, Communication of the Centre de Recherches Nucleares Strasbourg, 1988.
6. Обрешков Н. — Висша алгебра. София: Наука и изкуство, 1962.
7. Гантмахер Ф.Р. — Теория матриц. М.: Наука, 1967.
8. Ланкастер П. — Теория матриц. М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила 1 февраля 1989 года.